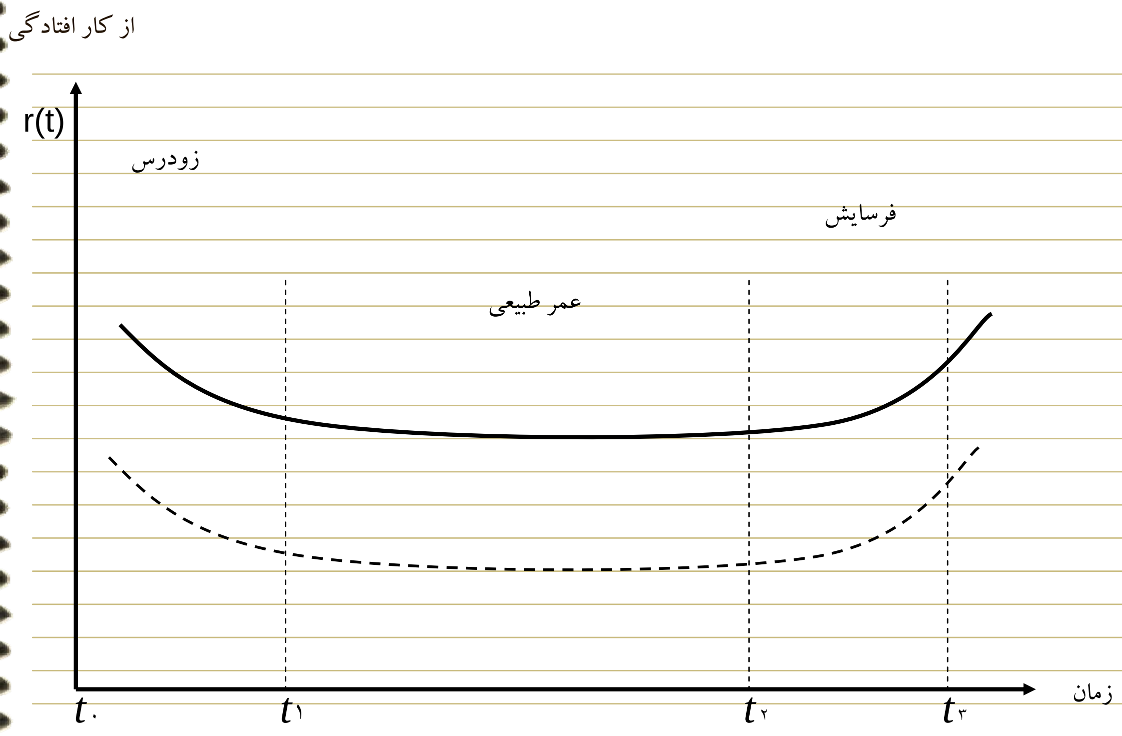
کاربرد آمار و احتمالات در نت

تعریف:

- از کار افتادگی: متوقف شدن هر نوع سیستم فیزیکی از جمله خط تولید، ماشین و ... را از کار افتادگی گویند.

الگوهای از کار افتادگی به سه دسته تقسیم می گردد:

- زودرس:
- عمر طبیعی
- فرسایش



الگوهای از کار افتادگی

۱. زودرس:

روش های جلوگیری (توزیع فوق نمایی یا نرمال)

– حمل و نقل مناسب دستگاه از خرید تا سالن
– وجود کارشناس متخصص نصب
– نحوه کنترل کیفیت کارخانه تولید کننده ماشین

۲. عمر طبیعی: شانس و تصادف (توزیع فوق نمایی)

۳. فرسایش: (نرمال یا وایبال)

انواع دیگر از کار افتادگی

۱. **اتفاقی یا ناگهانی:**

به طور ذاتی در سیستم های فیزیکی وجود دارد.

۲. **تدریجی :**

برخی از تجهیزات مانند ترانزیستور دارای طول عمر تقریباً مشخص هستند.

۳. **مستقل:**

چنانچه ارتباطی بین از کار افتادگی قطعات نباشد. بر عکس خرابی یک لامپ در سیستم سری که وابسته است.

مقدمه ای بر آمار و توزیع های آماری

- **متغیر تصادفی:**

تعداد ماشین های تراش از بین ۵۰ ماشین موجود

تعداد اشیاء ناقص در مجموعه n تایی

- **متغیر تصادفی پیوسته:**

مجموعه مقادیر ممکن در یک مجموعه اعداد حقیقی که فاصله ای از اعداد حقیقی در این مجموعه را در بر می گیرد.

- **متغیر تصادفی گسسته:**

مجموعه مقادیر ممکن در یک مجموعه محدود یا نامحدود که شمارش پذیر است و برای هر یک از عناصر این مجموعه احتمال معینی وجود دارد.

توزیع های آماری

- غیر پیوسته :
  - ✓دوجمله ای
  - ✓پواسون
- پیوسته:
  - ✓نرمال
  - ✓T استیودنت
  - ✓نمایی

۱. توزیع دو جمله ای

$$P(x)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^{m}q^{(n-m)}$$

احتمال وقوع متغیر تصادفی P = x

احتمال عدم وقوع متغیر تصادفی x $q=1-p$

$$\mu = np$$

$$\sigma^{2} = npq$$

مثال:

- احتمال آنکه کالایی معیوب باشد ۰,۳ است. اگر یک نمونه ۸ تایی انتخاب کنیم احتمال اینکه حداکثر ۲ تا از آن ها معیوب باشد چقدر است؟ میانگین و انحراف معیار را محاسبه کنید.

$$P(x \le ۲) = p(x=۰) + p(x=۱) + p(x=۲)$$

$$p(x \le ۲) = C_۸^۰(۰.۳)^۰(۰.۷)^۸ + C_۸^۱(۰.۳)^۱(۰.۷)^۷ + C_۸^۲(۰.۳)^۲(۰.۷)^۶ = ۰.۵۳۷$$

$$\mu = np = ۸ \times ۰.۳ = ۲.۴$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{۸ \times ۰.۳ \times ۰.۷} = ۱.۲۹$$

۲. توزیع پواسون

- تقریبی از توزیع دو جمله ای است. هنگامی کاربرد دارد که n بسیار بزرگ باشد و احتمال وقوع آن در یک فاصله زمانی معین بسیار کوچک باشد.

$$p_{(x)} = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$$

$$x = ۰, ۱, ۲, \ldots\ldots\ldots, n$$

$$\mu = \lambda$$

$$\sigma^۲ = \lambda$$

$$\lambda = np$$

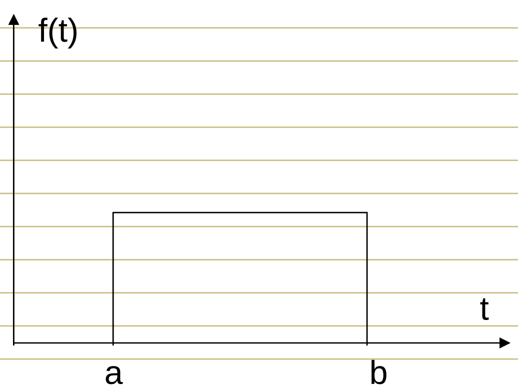
مثال:

- شرکت تراکتورسازی موتورهایی را که تولید می کند به طور متوسط ۴ عیب فنی دارد. یک موتور به طور تصادفی انتخاب می کنیم، احتمال اینکه ۵ عیب داشته باشد چقدر است؟

$$p(x=۵)=\frac{e^{-۴}\,۴^{۵}}{۵!}=۰.۱۵$$

۳. توزیع یکنواخت

- هنگامی که احتمال وقوع کلیه نتایج با یکدیگر برابر باشد، استفاده می گردد.



$$f(t)=\frac{۱}{b-a}$$

$$\mu=\frac{a+b}{۲}$$

$$\sigma^{۲}=\frac{(b-a)^{۲}}{۱۲}$$

۴. توزیع نرمال

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

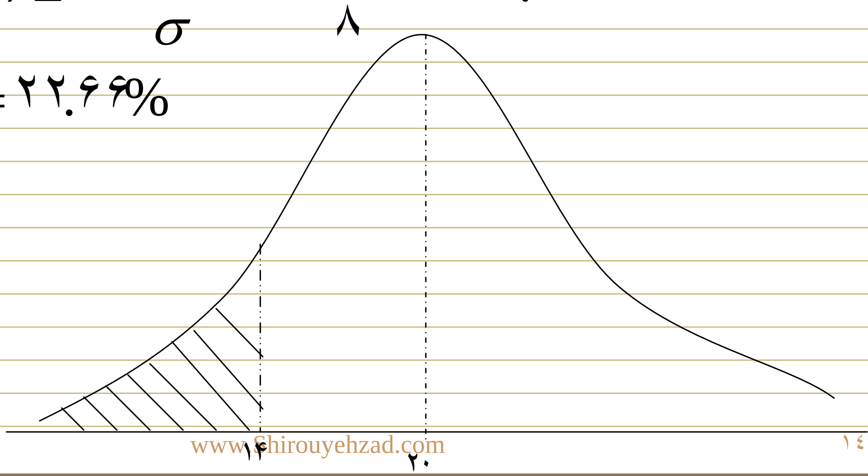
$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

مثال:

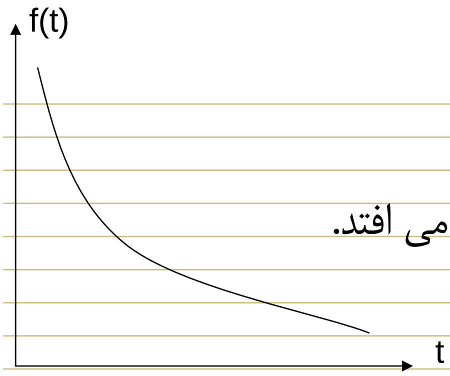
- توزیع ورود افراد به بانک از توزیع نرمال با میانگین ۲۰ و انحراف معیار ۸ نفر تبعیت می کند. احتمال آن که کمتر از ۱۴ نفر وارد بانک شوند، چقدر است؟

$$P(x\leq 14)\Rightarrow Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{14-20}{8}=-0.75$$

$$P(x\leq 14)=22.66\%$$



۵. توزیع نمایی منفی



- کاربردی ترین توزیع آماری در نت است.
- اگر یک جزء از کار بیفتد کل سیستم از کار می افتد.

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad f(t)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{1}{\lambda}t}$$

$$\mu=\frac{1}{\lambda} \qquad \mu=\lambda$$

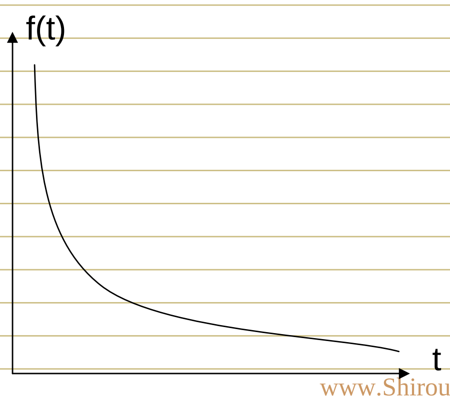
$$\sigma^2=\frac{1}{\lambda^2} \qquad \sigma^2=\lambda^2$$

۶. توزیع فوق نمایی

اگر فاصله اتفاق افتادن متغیرهای تصادفی خیلی کم یا خیلی زیاد باشد استفاده می گردد.

$$f(t)=2k^2\lambda e^{(-2k\lambda t)}+2\lambda(1-k)^2e^{-2k(1-k)\lambda t}$$

اگر k پارامتر توزیع بین $0 \le k \le 0.5$ باشد، توزیع فوق به نمایی نزدیک است.



۷. توزیع گاما

$$f(x)=\frac{b^{a+۱}}{\Gamma(a+۱)}x^a e^{-bx} \qquad x\geq ۰$$

$$a>-۱$$

$$\Gamma(n)=(n-۱)! \qquad b\geq ۰$$

$$\mu=\frac{a+۱}{b}$$

$$\sigma^۲=\frac{a+۱}{b^۲}$$

۸. توزیع بتا

$$f(x)=\frac{(a+b+۱)!}{a!b!}x^a(۱-x)^b \qquad \mu=\frac{a+۱}{a+b+۲}$$

$$-۱\leq x\leq ۱$$

$$\sigma^۲=\frac{(a+۲)(b+۱)}{(a+b+۲)^۲(a+b+۳)}$$

$$a\geq -۱$$

$$b>-۱$$

۹. توزیع وایبال

$$f(t)=\frac{b}{m}(x)^{b-۱}e^{-(\frac{t}{m})^{b}}$$

$$x=\frac{t}{m}$$

b : پارامتر توزیع

m : پارامتر خاصیتی با مقیاس

b=۱ : توزیع نمایی منفی

مثال های کاربردی

۱. توزیع خرابی یک ماشین از توزیع نرمال تبعیت می کند. که میانگین خرابی آن ۱۰ ساعت در ماه و انحراف معیار آن ۰,۲۵ ساعت است. مطلوب است احتمال اینکه تعداد خرابی این ماشین بین ۱۰,۲۵ – ۹,۵ ساعت باشد.

$$p(۹.۵\le x\le ۱۰.۲۵)=p(\frac{۹.۵-۱۰}{.۲۵}\le z\le \frac{۱۰.۲۵-۱۰}{.۲۵})$$

$$=p(-۲\le z\le ۱)=p(z\le ۱)-p(z\le -۲)$$

$$=۰.۸۴۱۳-(۱-۰.۹۷۷۲)=۰.۸۱۸۵$$

مثال های کاربردی

۲. طول عمر بلبرینگ از توزیع نرمال تبعیت می کند. متوسط عمر این قطعه برابر ۲۰۰ ساعت و انحراف معیار عمر آن ۲۱ ساعت می باشد. این بلبرینگ امروز روی چرخ پیکان انداخته شده است. احتمال آنکه حداقل ۱۷۰ ساعت کار کند چقدر است؟

$$p(x \geq ۱۷۰) = p(z \geq \frac{۱۷۰ - ۲۰۰}{۲۱}) = p(z \geq -۱.۴۲)$$

$$p(x \geq ۱۷۰) = ۴۲.۲۲\%$$

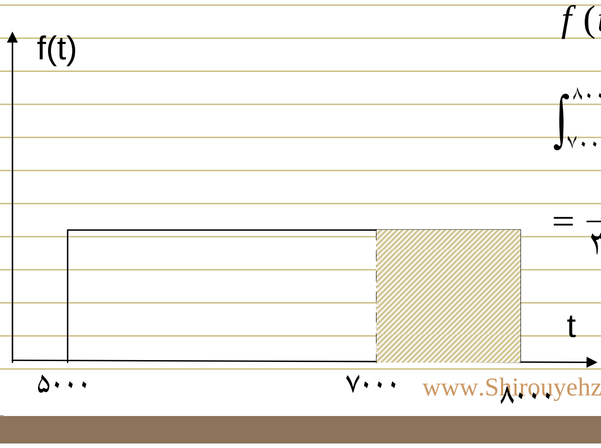
مثال های کاربردی

۳. طول عمر لاستیک های شرکت X حداقل ۵۰۰۰ و حداکثر ۸۰۰۰ کیلومتر است. اگر امروز از این لاستیک ها استفاده کنیم احتمال اینکه حداقل ۷۰۰۰ کیلومتر کار کند چقدر است؟

$$f(t) = \frac{۱}{b-a}$$

$$\int_{۷۰۰۰}^{۸۰۰۰} \frac{۱}{۸۰۰۰ - ۵۰۰۰} dt = \frac{۱}{۳۰۰۰} \int_{۷۰۰۰}^{۸۰۰۰} dt$$

$$= \frac{۱}{۳۰۰۰}(۸۰۰۰ - ۷۰۰۰) = ۰.۳۳$$



مثال های کاربردی

۴. طول عمر یک قطعه از توزیع نمایی منفی تبعیت میکندو متوسط عمر آن ۱,۵ سال است.

a) احتمال اینکه قطعه بین ۱ تا ۱,۵ سال کار کند چقدر است؟

b) احتمال اینکه بیش از یک سال کار کند چقدر است؟

$a)$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad \lambda = ۱,۵$$

$$\mathrm{P}(۱ \le \mathrm{t} \le ۱,۵) = \int_{۱}^{۱.۵} f(t)dt = \int_{۱}^{۱.۵} ۱.۵ e^{-۱.۵t} dt$$

$$= [-e^{-۱.۵t}]_{۱}^{۱.۵} = -[e^{-(۱.۵\times ۱.۵)} - e^{-(۱.۵\times ۱)}] = ۰.۱۲$$

$b)$

$$\mathrm{P}(۱ \le \mathrm{t} \le \infty) = \int_{۱}^{\infty} f(t)dt = \int_{۱}^{\infty} ۱.۵ e^{-۱.۵t} dt$$

$$= [-e^{-۱.۵t}]_{۱}^{\infty} = -[e^{-(۱.۵\times \infty)} - e^{-(۱.۵\times ۱)}] = ۰.۲۲$$

مثال های کاربردی

۵. یک ماشین بطور متوسط هر ۱۰ روز یکبار از کار می افتد. توزیع آماری از کار افتادگی از نمایی منفی تبعیت می کند.

a) واریانس و انحراف معیار از کار افتادگی را محاسبه کنید.

b) احتمال اینکه ماشین بین ۱۰ تا ۱۵ روز کار کند چقدر است؟

c) مقدار موجودی را برای یک روز محاسبه کنید به شرطی که احتمال عدم وجود قطعه لازم برای تعویض ۰,۰۰۵ باشد

$a)$

$$\lambda = \frac{۱}{۱۰} \qquad \sigma^{۲} = \frac{۱}{\lambda^{۲}} = ۰.۰۱ \qquad \sigma = ۰,۱$$

b)

$$\mathrm{P}(۱۰ \le \mathrm{t} \le ۱۵) = \int_{۱۰}^{۱۵} ۰.۱ e^{-۰.۱t} dt = [-e^{-۰.۱t}]_{۱۰}^{۱۵} = -[e^{-(۰.۱\times ۱۵)} - e^{-(۰.۱\times ۱۰)}] = ۰.۱۴$$

مثالهای کاربردی

$$P(\cdot \le t \le 1) = \int_{\cdot}^{1} \cdot.1 e^{-\cdot.1t} dt = [-e^{-\cdot.1t}]_{\cdot}^{1}$$

$$P(\cdot \le t \le 1) = -[e^{-\cdot.1\times 1} - e^{-\cdot.1\times\cdot}] = \cdot.1$$

• چون احتمال خرابی در یک روز ۱۰٪ است پس اگر n بار از کار بیافتد و نیاز به قطعه داشته باشیم و حدود اطمینان از موجودی ۰٫۹۹۵ و یا عدم موجودی ۰٫۰۰۵ باشد، داریم:

$$(\cdot.1)^n < \cdot.\cdot\cdot5$$

$$n \ln \cdot{,}1 < \ln \cdot{,}\cdot\cdot5$$

$$-2{,}3 \;\; n < -5{,}29 \quad \Rightarrow \quad n > 2{,}3 = 3$$

مثال های کاربردی

۶. توزیع خرابی یک قطعه از توزیع پواسون تبعیت می کند. میانگین خرابی قطعه ۲ بار در ماه است.

a) احتمال اینکه قطعه در هر ماه کمتر از دو بار از کار بیافتد.

b) احتمال اینکه قطعه در هر ماه بیش از دو بار از کار بیافتد.

c) احتمال اینکه دقیقاً ۳ بار از کار بیافتد.

$a)$

$$\mu = \lambda \qquad \lambda = 2 \qquad f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$P(x < 2) = P(x = \cdot) + P(x = 1)$$

$$= \frac{e^{-2}2^{\cdot}}{\cdot!} + \frac{e^{-2}2^{1}}{1!} = \cdot.135 + \cdot.27 = \cdot.4\cdot5$$

$b)$

$$P(x > 2) = 1 - P(x \le 2)$$

$$= 1 - [P(x = \cdot) + P(x = 1) + P(x = 2)] = \cdot{,}325$$

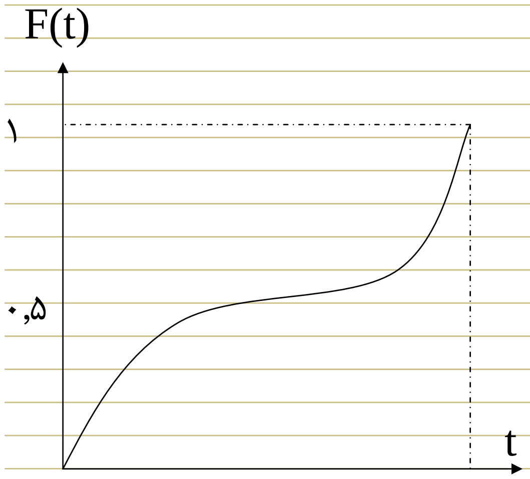
c)

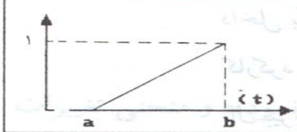
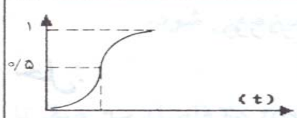
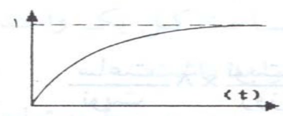
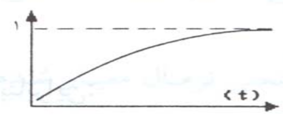
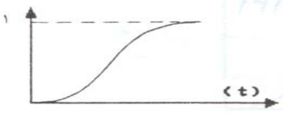
$$P(x = 3) = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = \cdot{,}18$$

تابع توزیع تجمعی

احتمال وقوع خرابی قبل از زمان t

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t)dt$$

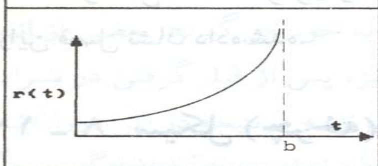
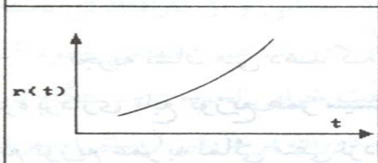
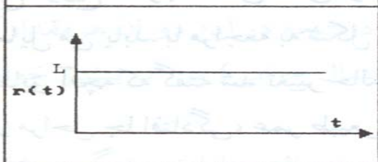
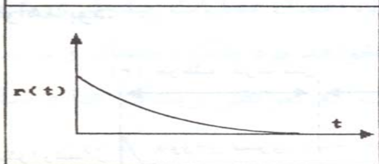
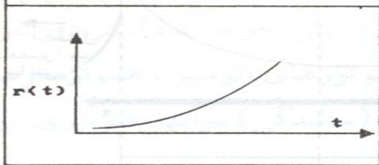


نام تابع	فرمول تابع توزیع جمعی	نمودار تقریبی تابع توزیع جمعی
یکنواخت	$F(t)=\int_{a}^{t} c.dt=\frac{t-a}{b-a}$ $a<t<b$ $c=$ مقدار ثابت $=\frac{1}{b-a}$	
نرمال	$F(t)=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} e^{[\frac{-(t-m)^2}{2s^2}]}.dt$ $m=$ میانگین متغیر t $s=$ انحراف معیار	
نمائی منفی	$F(t)=1-e^{-Lt}$ $L=$ سرعت خرابی	
فوق نمائی	$F(t)=1-k.e^{-2kLt}-(1-k).e^{-2(1-k)Lt}$ $L=$ سرعت خرابی $k=$ پارامتر شکل توزیع $0.0<k<0.5$	
پواسون	$F(t)=\sum_{r<t}^{t} \frac{e^{-nLt}.(nLt)^r}{r!}$ $r=$ ۰، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۰۰۰۰ $L=$ سرعت خرابی $n=$ تعداد زیر سیستم‌ها	به شکل ۱۷ – ۱۱مراجعه‌شود
ویبول	$F(t)= e^{(\frac{t}{m})^b}$ $b=$ پارامتر شکل توزیع $m=$ پارامتر خاصیتی توزیع	

Instantaneous Rate Of Failure   سرعت لحظه ای خرابی

احتمال وقوع خرابی بعد از زمان t را به شرطی که قبل از زمان t خرابی اتفاق نیافتاده است.

$$r(t)=\frac{f(t)}{۱-F(t)}$$

نام تابع	فرمول تابع سرعت لحظه‌ای خرابی	نمودار تقریبی تابع سرعت خرابی
یکنواخت	$r(t)=\frac{1}{b-t}$ $a\leqslant t\leqslant b$	
نرمال	$r(t)=\dfrac{e^{\left[\frac{-(t-M)^2}{2s^2}\right]}}{\int_t^{\infty} e^{\left[\frac{-(t-M)^2}{2s^2}\right]}.dt}$ s= انحراف معیار M= میانگین	
نمائی منفی	$r(t)=L$ L= سرعت خرابی	
فوق نمائی	$r(t)=\dfrac{2L[k^2+(1-k)^2].e^{-[2Lt(1-2k)]}}{k+(1-k).e^{-[2Lt(1-2k)]}}$ L=سرعت خرابی k=پارامتر شکل توزیع	
ویبول	$r(t)=\frac{b}{M}\left(\frac{t}{M}\right)^{b-1}$ b=پارامتر شکل توزیع M=پارامتر خاصیتی توزیع	

مثال

- توزیع از کارافتادگی یک ماشین از توزیع نرمال تبعیت می کند. متوسط عمر آن ۲۰۰ و انحراف معیار آن ۴۰ روز می باشد. اگر این ماشین ۱۰۰ روز بدون خرابی کار کند سرعت لحظه ای خرابی را حساب کنید.

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{۱۰۰-۲۰۰}{۴۰}=-۲.۵$$

$$Z(-۲.۵)=۰.۰۱۷۵$$

$$f(t)=\frac{۰.۰۱۷۵}{۴۰}=۰.۰۰۰۴۳۷۵$$

$$۱-F(t)=۰.۹۹۳۸$$

$$r(t)=\frac{۰.۰۰۰۴۳۷۵}{۰.۹۹۳۸}=۰.۰۰۰۴۴$$

اگر ماشین ۲۷۵ روز بدون توقف کار کند؟

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{۲۷۵-۲۰۰}{۴۰}=۱.۸۷۵$$

$$f(t)=\frac{۰.۰۶۹۴}{۴۰}=۰.۰۰۱۷۳۵$$

$$۱-F(t)=۰.۰۳۰۷ \Rightarrow \quad r(t)=۰,۰۵۶$$

r(t) افزایش دارد.

مثال

- توزیع خرابی یک ماشین از نمایی منفی تبعیت می کند. متوسط خرابی آن یک ساعت در ۱۵۰ ساعت است. این ماشین ۱۲۰ ساعت بدون توقف کار کرده است. سرعت لحظه ای آن را حساب کنید.

$$\lambda = \frac{۱}{۱۵۰} = ۰.۰۰۶۶۶۶$$

$$f(t) = ۰.۰۰۶۶۶۶ \quad e^{-۰.۰۰۶۶۶۶ \quad t}$$

$$F(t) = \int_{۰}^{۱۲۰} \frac{۱}{۱۵۰} e^{-\frac{۱}{۱۵۰}t} dt$$

$$r(t) = \frac{\frac{۱}{۱۵۰} e^{-\frac{۱}{۱۵۰}\times ۱۲۰}}{۱ - \int_{۰}^{۱۲۰} \frac{۱}{۱۵۰} e^{-\frac{۱}{۱۵۰}t} dt} = \frac{۰.۰۰۲۹۹۵}{۰.۴۴۹۳۲۸} = ۰.۰۰۶۶۶۶$$

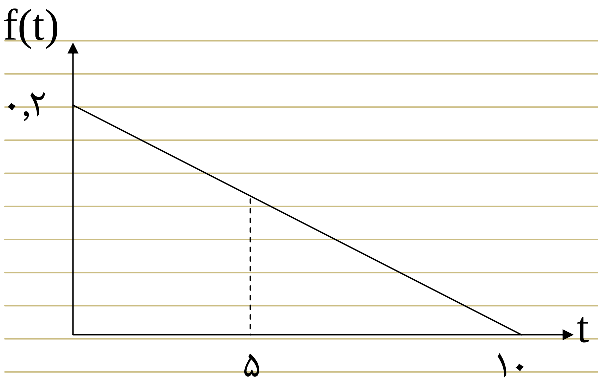
سرعت لحظه ای برابر λ است.

مثال

- یک شرکت تولیدی تصمیم دارد تا آن لحظه از تجهیزات خود استفاده نماید که سرعت آنی از کارافتادگی آن ها به ۰,۴ خرابی در سال (۴ خرابی در ۱۰ سال) برسد. شرکت درست در تاریخی که ماشین ها به این موفقیت می رسند آن ها را از طریق مزایده به فروش می رساند و با ماشین نو جایگزین می نماید. برای یک دستگاه ماشین تولیدی تابع چگالی توزیع عمر به صورت زیر است:

$$f(t) = ۰.۲ - ۰.۰۲t \qquad ۰ \le t \le ۱۰$$

این ماشین بعد از چند سال بهره برداری باید جایگزین گردد. قابل توجه است که در این مثال تابع توزیع چگالی عمر ماشین یک تابع مثلثی است.



$$r(t) = \frac{f(t)}{۱ - F(t)} = ۰.۴$$

$$F(t) = \int f(t)$$

پس از ۵ سال کارکرد ماشین به فروش می رسد.

$$r(t) = \frac{(۰.۲ - ۰.۰۲t)}{۱ - (۰.۲t - ۰.۰۱t^{۲})} = ۰.۴$$

$t = ۵$ قابل قبول $t = ۱۰$ مبهم