

قابلیت اطمینان Reliability

• احتمال کارکرد سالم ماشین ، تجهیزات و سیستم ها در شرایط مشخص و در یک فاصله زمانی مشخص می باشد .

تابع قابلیت اطمینان :

این تابع مکمل تابع توزیع انباشته ($F(t)$) است .

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt - \int_0^t f(t)dt$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} f(t)dt$$

$$0 \leq R \leq 1$$

قابلیت اطمینان

– عدم وابستگی به زمان (قابلیت اطمینان لحظه ای)

– وابستگی به زمان (توزیع مشخص)

تعداد خرابی در یک واحد زمان

$$R = 1 - F/N \rightarrow \text{میزان عملکرد در واحد زمان} = \text{نرخ شکست} - 1$$

مثال : یک ماشین در هر ۱۰۰ ساعت ۲ ساعت خراب شود قابلیت اطمینان چقدر است ؟

$$R = 1 - 2/100 = 0,98$$

سیستمهای عملیاتی به ۴ حالت تقسیم می گردد :

حالت اول : سیستم های سری

با از کار افتادن یک جزء کل سیستم متوقف می گردد .



الف - عدم وابستگی به زمان

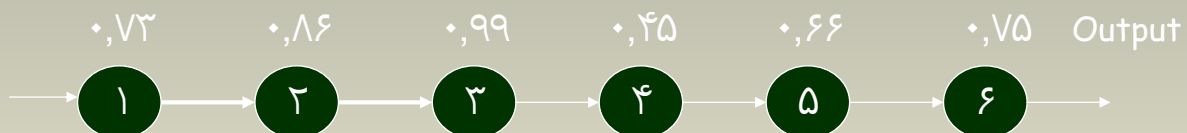
$$R_s = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$$

$$R_s = \prod_{i=1}^n R_i$$

مثال :

قابلیت اطمینان ۶ ماشین در خط مونتاژ دوچرخه با توجه به شکل و اطلاعات زیر چه قدر است:

Input



$$R = 0.73 \times 0.86 \times \dots \times 0.75 = 0.128$$

ب) وابستگی به زمان

۱. توزیع نمایی منفی

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

$$R(t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt = e^{-\lambda t}$$

$$R_s = \prod_{i=1}^n R_i$$

$$R_1 = e^{-\lambda_1 t}$$

λ_1 : نرخ شکست ماشین اول

$$R_s = e^{-\lambda_1 t} \times e^{-\lambda_2 t} \times \dots$$

$$R_s = e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t}$$

$$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

$$\Rightarrow R_s = e^{-\lambda_s t}$$

مثال:

♦ چهار قطعه با یکدیگر ارتباط سری دارند که نرخ شکست آن ها به ترتیب زیر بر حسب ساعت می باشد. توزیع از کار افتادگی نمایی منفی است. قابلیت اطمینان را برای ۱۰ و ۲۰ ساعت کار حساب کنید.

$$\lambda_1 = 0.003 \quad \lambda_2 = 0.04 \quad \lambda_3 = 0.005 \quad \lambda_4 = 0.002$$

$$\lambda_s = 0.003 + 0.04 + 0.005 + 0.002 \quad t = 10$$

$$R_s = e^{-0.05 \times 10} = 0.6$$

$$R_s = e^{-0.05 \times 20} = 0.36$$

زمان متوسط خرابی (MTBF)

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_s}$$

$$MTBF = \frac{1}{0.05} = 20 \quad \text{در مثال فوق (بر حسب ساعت)}$$

تعداد اجزا در سیستم سری

$$R_s = \prod_{i=1}^n R_i$$

$$n = \frac{R_i}{R_s}$$

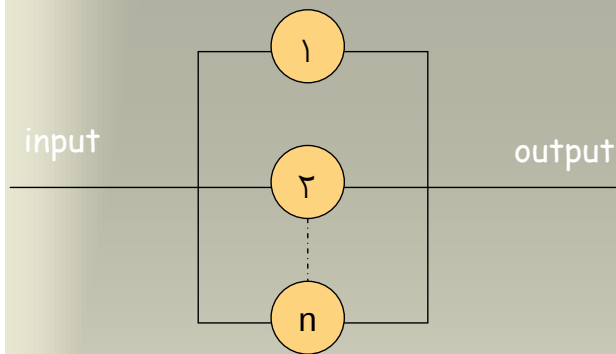
♦ مثال: اگر قابلیت اطمینان یک ماشین ۰.۶ باشد چه تعداد ماشین سری لازم است تا قابلیت اطمینان حداقل ۲۰٪ باشد.

$$n = \frac{0.6}{0.2} = 3$$

• خصوصیات سیستم سری

- i. با از کار افتادگی یک جزء کل سیستم از کار می افتد.
- ii. قابلیت اطمینان سیستم های سری از قابلیت اطمینان تک تک اجزا کمتر است.
- iii. با افزایش تعداد اجزاء، قابلیت اطمینان کل کاهش می یابد.
- iv. با زیاد کردن زمان کارکرد، قابلیت اطمینان کل سیستم کاهش می یابد.

حالت دوم: سیستم های موازی



الف- بدون وابستگی زمان

عدم قابلیت اطمینان : Q

قابلیت اطمینان : R

$$R_s = 1 - [(1 - R_1)(1 - R_2) \dots (1 - R_n)]$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n Q_i$$

$$Q = 1 - R$$

یا

$$R + Q = 1$$

مثال:

❖ چهار دستگاه متهم به صورت موازی چیده شده اند. اگر قابلیت اطمینان هر جزء به صورت زیر باشد، قابلیت اطمینان کل سیستم را محاسبه نمایید.

$$R_1 = 0.7 \quad R_2 = 0.65 \quad R_3 = 0.78 \quad R_4 = 0.69$$

$$R_s = 1 - [(1 - 0.7)(1 - 0.65) \dots] = 0.99$$

ب) وابسته به زمان

♦ توزیع نمایی منفی

$$R(t) = e^{-\lambda t}$$

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

$$R_s = 1 - [(1 - e^{-\lambda_1 t})(1 - e^{-\lambda_2 t}) \dots \dots \dots]$$

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t})$$

• مثال

چهار قطعه با همدیگر ارتباط موازی دارند. توزیع عمر آن ها نمایی منفی است. نرخ شکست هر کدام به شرح زیر است. قابلیت اطمینان را برای ۳۰ و ۱۰۰ ساعت آینده حساب کنید.

$$\lambda_1 = 0.005 \quad \lambda_2 = 0.045 \quad \lambda_3 = 0.078 \quad \lambda_4 = 0.002$$

$$t = 30$$

$$R_s = 1 - [(1 - e^{-0.005 \times 30})(1 - e^{-0.045 \times 30})(1 - e^{-0.078 \times 30})(1 - e^{-0.002 \times 30})]$$

$$= 1 - (0.139 \times 0.74 \times 0.9 \times 0.8) = 0.99$$

$$t = 100$$

$$R_s = 1 - (0.6 \times 0.98 \times 0.99 \times 0.95) = 0.44$$

زمان میانگین بین دو خرابی

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2\lambda} + \dots \quad \text{اگر } \lambda \text{ ها مساوی باشند}$$

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

$$MTBF = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{دو جزء}$$

مثال :

اگر نرخ شکست قطعه A برابر ۰/۰۳ و قطعه B برابر ۰/۰۰۵ باشد و موازی چیده شده باشند MTBF را حساب کنید .

$$MTBF = \frac{1}{0.03} + \frac{1}{0.005} - \frac{1}{0.03 + 0.005} = 262$$

مثال :

نرخ شکست ۵ ماشین که به صورت موازی چیده شده اند همگی برابر $\lambda = 0.05$ می باشد زمان متوسط خرابی را حساب کنید .

$$MTBF = \frac{1}{0.05} + \frac{1}{2(0.05)} + \dots = 41.6$$

– تعداد اجزای سیستم موازی

$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i)$$

$$n = \frac{\text{Ln} (1 - R_s)}{\text{Ln} (1 - R)}$$

مثال :

اگر قابلیت اطمینان یک ماشین ۰/۴ بوده چند دستگاه بطور موازی چیده شوند تا قابلیت اطمینان سیستم ۰/۹۵ باشد .

$$R = 0.4$$

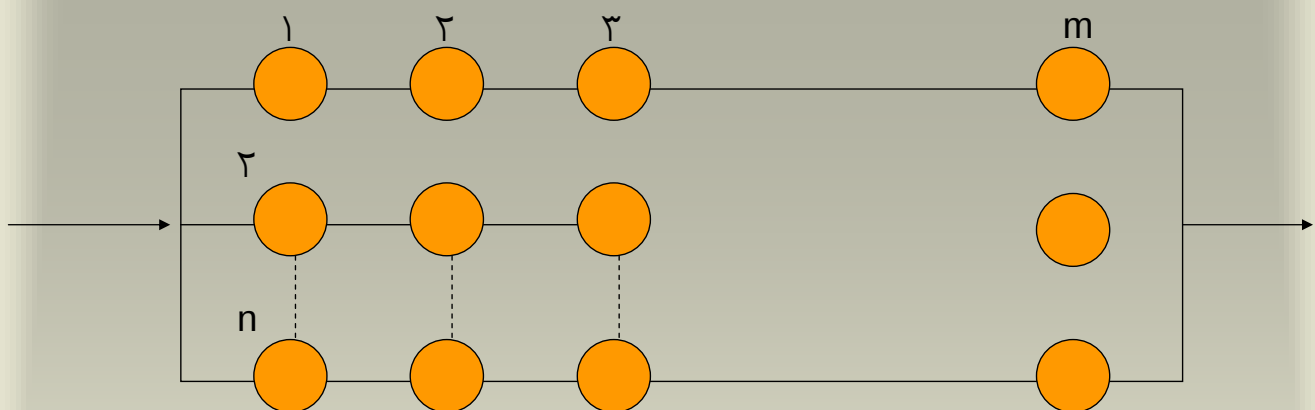
$$R_s = 0.95$$

$$n = \frac{\text{Ln} (1 - 0.95)}{\text{Ln} (1 - 0.4)} = 6$$

خصوصیات سیستم موازی

- ۱- قابلیت اطمینان کل از تک تک اعضا بیشتر است
- ۲- با از کار افتادن یک جزء کل سیستم کار می کند
- ۳- هر چه تعداد اجزاء بیشتر قابلیت اطمینان بیشتر
- ۴- با افزودن زمان میزان قابلیت اطمینان کمتر (وابسته به زمان)

حالت سوم : سری - موازی

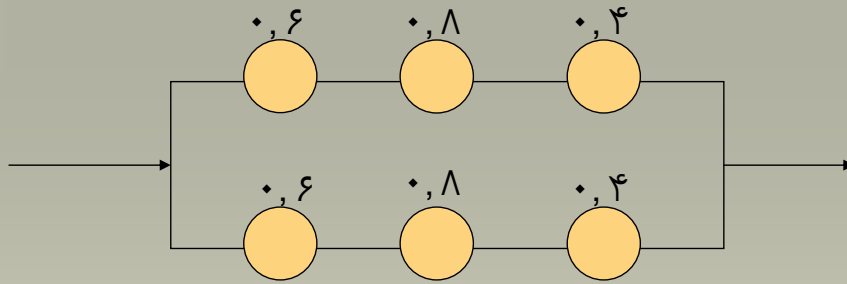


می توان از فرمولهای موازی و سری استفاده کرد یا از فرمول زیر :

$$R_s = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n R_i \right)^n$$

به شرطی که ماشین ۱ تا n قابلیت اطمینان مساوی داشته باشند .

مثال :



راه اول :

$$R_s = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n R_i \right)^n$$

$$R_s = 1 - [1 - (0.6 * 0.8 * 0.4)]^2 = 0.347$$

راه دوم :

$$R_1 = 0.6 * 0.8 * 0.4 = 0.192$$

$$R_2 = 0.6 * 0.8 * 0.4 = 0.192$$

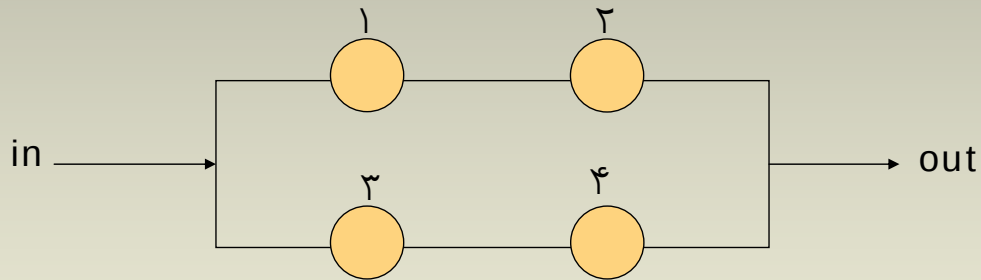
$$R_s = 1 - [(1 - 0.192)(1 - 0.192)] = 0.347$$

وابسته به زمان

♦ توزیع یکنواخت

مثال :

با توجه به شکل زیر و سایر اطلاعات جدول قابلیت اطمینان را برای ۱۰۰ ساعت حساب کنید .



ماشین	حداکثر عمر b	حداقل عمر a	قابلیت اطمینان برای t
۱	۱۸۰	۹۰	۱۰۰
۲	۱۵۰	۸۵	۱۰۰
۳	۱۳۰	۱۰۰	۱۰۰
۴	۲۰۰	۹۵	۱۰۰

$$R(t) = \frac{b-t}{b-a}$$

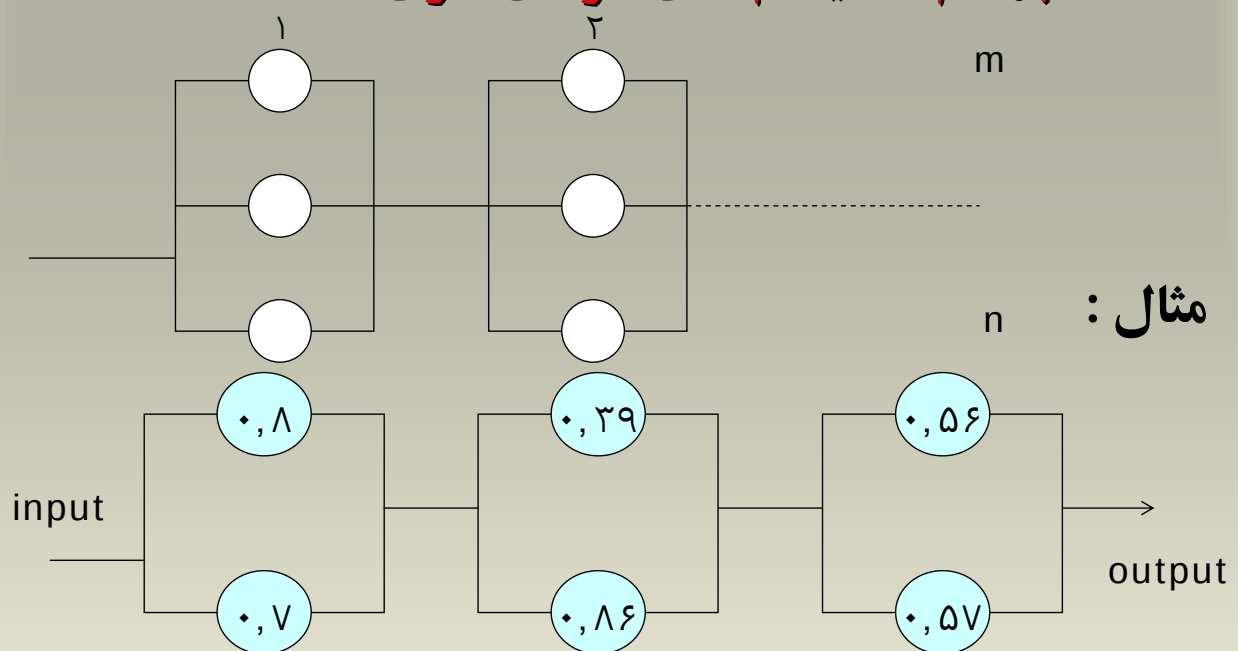
ماشین	R(t)
۱	$\frac{180-100}{180-90} = 0.88$
۲	$\frac{150-100}{150-85} = 0.76$
۳	۱
۴	۰,۹۵

$$R_1 = 0,88 * 0,76 = 0,66$$

$$R_2 = 1 * 0,95 = 0,95$$

$$R_s = 1 - [(1 - 0,66)(1 - 0,95)] = 0,83$$

حالت چهارم - سیستم های موازی سری



$$R_1 = 1 - [(1 - 0,8)(1 - 0,7)] = 0,94$$

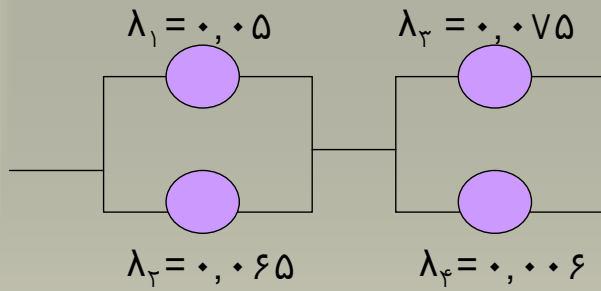
$$R_2 = 0,91$$

$$R_3 = 0,81$$

$$R_s = 0,94 * 0,91 * 0,81 = 0,69$$

وابسته به زمان

مثال:



قابلیت اطمینان برای ۳۰ ساعت آینده

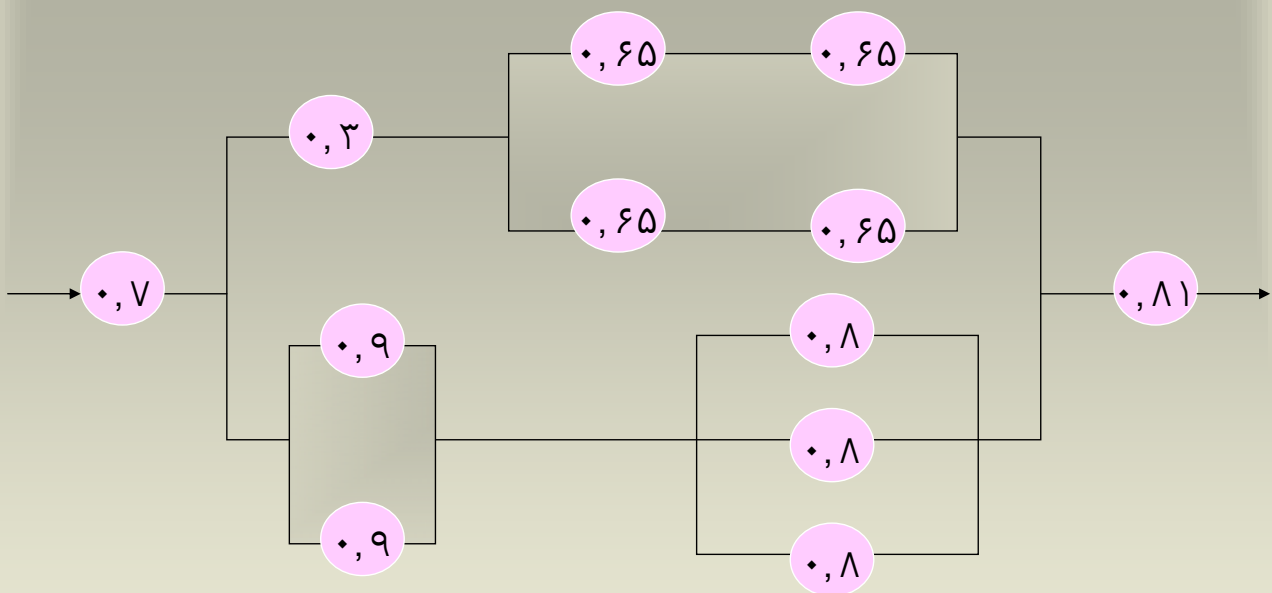
$$R_s = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda_i t})$$

$$R_1 = 1 - \left[(1 - e^{-0.05 \times 30}) (1 - e^{-0.065 \times 30}) \right] = 0.33$$

$$R_2 = 0.85$$

$$R_s = 0.33 \times 0.85 = 0.28$$

حالت پنجم: سیستم های مختلف



$$R_1 = 0,65 * 0,65 = 0,42 \Rightarrow RS_1 = 1 - [(1 - 0,42)(1 - 0,42)] = 0,66$$

$$R_2 = 0,65 * 0,65 = 0,42$$

$$RS_2 = 1 - [(1 - 0,9)(1 - 0,9)] = 0,99$$

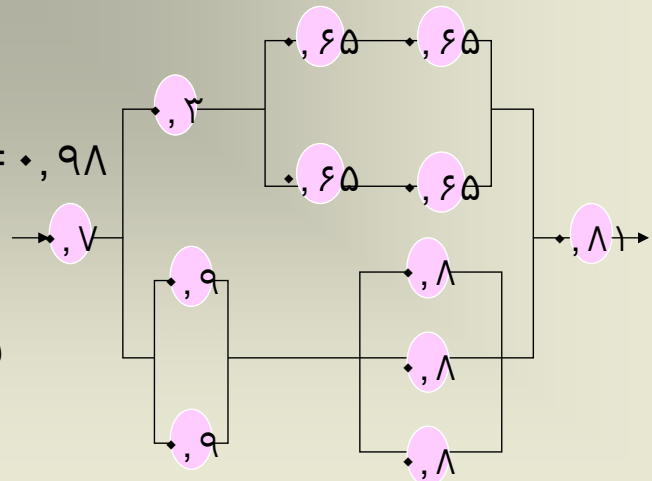
$$RS_3 = 1 - [(1 - 0,8)(1 - 0,8)(1 - 0,8)] = 0,99$$

$$\text{ردیف بالا} = 0,3 * 0,66 = 0,198$$

$$\text{ردیف پایین} = 0,99 * 0,99 = 0,98$$

$$RS_4 = 1 - [(1 - 0,198)(1 - 0,98)] = 0,98$$

$$RS = 0,7 * 0,98 * 0,81 = 0,55$$



بهینه کردن قابلیت اطمینان

سیستمهای موازی بهتر از سیستم های سری می باشد .

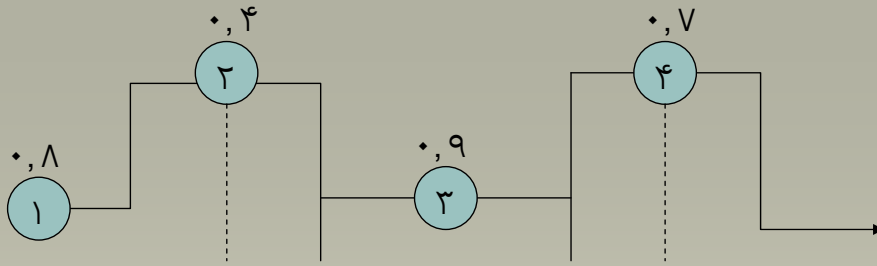
$$\max R = \prod_{i=1}^m (1 - q_i^{n_i}) \longrightarrow \text{عدم اطمینان ماشین } i \text{ ام}$$

s.t

$$C_1 n_1 + C_2 n_2 + \dots \leq B \longrightarrow \text{بودجه}$$

$$n_i \geq 1$$

مثال :



$$C_1 = 50$$

$$C_2 = 250$$

$$C_3 = 100$$

$$C_4 = 150$$

$$B = 1000$$

مراحل ۲ و ۴ چند ماشین می توانیم اضافه کنیم

$$\max R = \prod_{i=1}^n (1 - q_i^n)$$

$$\max R = 0.8 \times (1 - 0.6^{n_2}) \times 0.9 \times (1 - 0.3^{n_4})$$

$$\max R = 0.72 (1 - 0.6^{n_2}) (1 - 0.3^{n_4})$$

$$50 + 250 n_2 + 100 + 150 n_4 \leq 1000$$

$$150 + 250 n_2 + 150 n_4 \leq 1000$$

$$250 n_2 \leq 850 - 150 n_4$$

$$n_2 \leq \frac{850 - 150 n_4}{250}$$

به n_4 مقادیر ۱ الی m را اختصاص می دهیم و n_3 را به دست می آوریم R و بودجه را نیز تعیین می کنیم. تا جایی که با تخصیص عدد به n_4 مقدار n_3 کمتر از ۱ شود.

B	R_s	n_3	n_4
۸۰۰	۰,۳۲	$۲,۸=۲$	۱
۹۵۰	۰,۴۱	$۲,۲=۲$	۲
۸۵۰	۰,۲۸	$۱,۶=۱$	۳
۱۰۰۰	۰,۲۸۵	۱	۴
---	---	۰,۴	۵

شاخصهای ارزیابی قابلیت اطمینان

الف- فرکانس یا سرعت خرابی :

تعداد خرابی ها در واحد زمان λ یا L

$$\lambda = \frac{\text{تعداد خرابیها در یک سیکل زمانی}}{\text{جمع زمان سیکل}}$$

ب- متوسط فاصله زمانی بین دو خرابی MTBF

Mean Time Between Failures

$$MTBF = \frac{1}{\lambda}$$

ج- شاخص بیشترین خرابی یا ده ماشین TTT

Three Top Troubling

Ten

در مورد تجهیزاتی بکار می رود که در یک دوره زمانی خاص نسبت به بهینه تجهیزات یا ماشین آلات ، خرابی ، هزینه بری یا زمان تعمیر بیشتری داشته باشند سه یا ده ماشین انتخاب می گردد .

شماره دستگاه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
نرخ خرابی	۳	۴	۷	۲	۱	۵	۱۰	۱۱	۳	۲	۱	۵	۴

شماره دستگاه	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳
نرخ خرابی	۶	۷	۸	۱۰	۱۹	۳	۷	۲۱۸	۵	۲۱

۸، ۱۸ و ۲۱ بیشترین نرخ خرابی را دارند .

د- شاخص میانگین زمان بین دو تعمیر پیشگیری و اتفاقی MTBM

Mean Time Between Main Tenance

نرخ تعمیرات پیشگیری λ

$$MTBM = \frac{1}{\lambda + \mu}$$

نرخ خرابی اتفاقی μ

مثال :

دستگاه دریل ساخت سوئد هر ۴۰ روز یکبار جهت تعمیرات پیشگیری متوقف می شود و هم چنین به طور متوسط هر ۷۰ روز یکبار به طور اتفاقی از کار می افتد MTBM را حساب کنید .

$$\mu = \frac{1}{40}$$

$$\lambda = \frac{1}{70}$$

$$MTBM = \frac{1}{\frac{1}{40} + \frac{1}{70}} = 25.45 = 26$$

شأنفصهای تعمیر پذیرى

الف- میانگین زمان لازم برای تعمیرات اتفاقی یا اضطراری MTTR

Mean Time to Repair

به طور متوسط زمان هر تعمیر اضطراری چقدر می باشد هر چه کمتر باشد نشاندهنده تعمیر پذیر بودن آنست .

$$MTTR = \frac{\sum_{i=1}^n t_i \lambda_i}{\sum \lambda_i}$$

n = تعداد دفعات تعمیر اضطراری انجام شده

t_i = متوسط زمان هر دفعه تعمیر اضطراری برای هر جزء از دستگاه

λ_i = نرخ خرابی هر جزء از دستگاه

مثال :

دستگاهی از سه سیستم مکانیکی ، الکترونیکی و الکتریکی تشکیل شده است . تعداد خرابی های سیستم ها در طول یک ماه به ترتیب ۳ بار مکانیکی ، ۷ بار الکترونیکی و ۵ بار الکتریکی و متوسط زمان لازم برای تعمیر هر سیستم برای مکانیکی ۱۵ دقیقه الکترونیکی ۱۷ دقیقه و الکتریکی ۲۱ دقیقه است . شاخص MTTR را حساب کنید .

$$MTTR = \frac{(3 \times 15) + (7 \times 17) + (5 \times 21)}{3 + 7 + 5} = 17.93 = 18 \text{ دقیقه}$$

MTTR = میانگین وزنی زمان تعمیرات

ب- میانگین زمان لازم برای تعمیرات پیشگیری MTTP (TP)

Mean Time to Preventive

مشابه MTTR

$$MTTP = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i \times tp_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i}$$

μ_i = نرخ تعمیرات پیشگیری

tp_i = متوسط زمان تعمیرات پیشگیری برای جزء i ام

مثال :

چهار جزء یک دستگاه طبق برنامه تعمیرات پیشگیری هر کدام ترتیب بصورت هفته ای ، ماهیانه ، هر دو ماه و روزانه بایستی عملیات پیشگیری روی آنها انجام گیرد . زمان عملیات پیشگیری برای هر جزء بترتیب برابر ۲۱ ، ۳۰ ، ۱۵ و ۶ دقیقه است .

$$MTTP = \frac{(25 \times 12) + (12 \times 30) + (6 \times 15) + (365 \times 6)}{52 + 12 + 6 + 365} = \frac{3732}{435} = 8.57$$

ج- میانگین زمان لازم برای تعمیرات پیشگیری و اتفاقی TPF

$$Tpf = \frac{\sum \lambda_i t_i + \sum_{i=1}^n \mu_i \times tp_i}{\sum \lambda_i + \sum_{i=1}^n \mu_i}$$

مثال : برای دو مثال قبلی

$$TPF = \frac{3732 + 269}{435 + 15} = 8.89$$

کنترل موجودی انبار قطعات یدکی

مقدار سفارش اقتصادی

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Cr}{I}} \times \sqrt{\frac{I + C'}{C'}}$$

r = میانگین مقدار مصرف در واحد زمان (عدد/سال)

C = هزینه های تدارکاتی مربوط به هر بار سفارش (ریال)

I = هزینه نگهداری کالا

C' = هزینه کمبود

کاربرد اقتصاد مهندسی در نت

– آیا تعویض ماشین اقتصادی است .

– آیا تغییر تکنولوژی به صرفه است .

– بین چند نوع سرمایه گذاری

مباحث مهم مثل :

– استهلاک Depreciation برای دستگاه بسیار مهم است .

هزینه استهلاک و روشهای آن :

ارزش دفتری = قیمت اولیه _ مجموع هزینه های

۱- روش خط مستقیم :

$$D = \frac{P - S}{n}$$

قیمت اولیه $\swarrow$ P $\longrightarrow$ ارزش اسقاطی S
 n $\longrightarrow$ عمر مفید

۲- جمع ارقام سنوات :

$$Syd = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$D = \frac{n - k + 1}{Syd} (P - S) \quad K=1,2,\dots,n$$

۳- موجودی گروهی : DB

موجودی گروهی داین

اصول پایه در اقتصاد مهندسی

الف- بهره interest

$$\text{نرخ بهره} = \frac{\text{سرمایه اولیه} - \text{اصل و فرع}}{\text{سرمایه اولیه}} \times 100$$

ب- نرخ بازگشت سرمایه ROR

$$\text{ROR} = \frac{\text{اصل سرمایه} - \text{اصل و فرع}}{\text{اصل سرمایه}} \times 100$$

ج- حداقل نرخ جذب کننده MARR

تکنیک های اقتصاد مهندسی

NPW _

EUAC _

ROR _

B/C _

کاربرد تکنیک های اقتصاد مهندسی

مثال : شرکت تراکتور سازی می خواهد یکی از ماشین آلات خود را تعویض نماید . دو ماشین مشابه در بازار موجود است که اطلاعات آنها به شرح زیر می باشد .

$$MARR = 15\%$$

	B_1	B_2
خرید	۷۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰۰
هزینه عملیاتی سالیانه	۵۰۰۰۰	۳۰۰۰۰
ارزش اسقاطی	۱۰۰۰۰۰	۳۰۰۰۰۰
عمر مفید	۶	۶

$$P_{B_1} = 700000 + 50000(P/A, 15\%, 6) - 100000(P/F, 15\%, 6)$$
$$= 845991$$

$$P_{B_2} = 900000 + 30000(P/A, 15\%, 6) - 300000(P/F, 15\%, 6)$$
$$= 883436$$

با تکنیک EUAC

	B	A
هزینه اول	۳۵۰۰۰	۲۵۰۰۰
هزینه تعمیرات سالیانه	۵۰۰۰	۷۰۰۰
هزینه پرسنلی سالیانه	۳۰۰۰	۶۰۰۰
ارزش اسقاطی	۹۰۰۰	۵۰۰۰
عمر مفید	۱۲	۹
MARR	۱۰٪	۱۰٪

$$EUAC_A = 25000(A/P, 10\%, 9) + 7000 + 6000 - 5000(A/F, 10\%, 9) = 16972$$

$$EUAC_B = 35000(A/P, 10\%, 12) + 5000 + 3000 - 9000(A/F, 10\%, 12) \\ = 12715 *$$

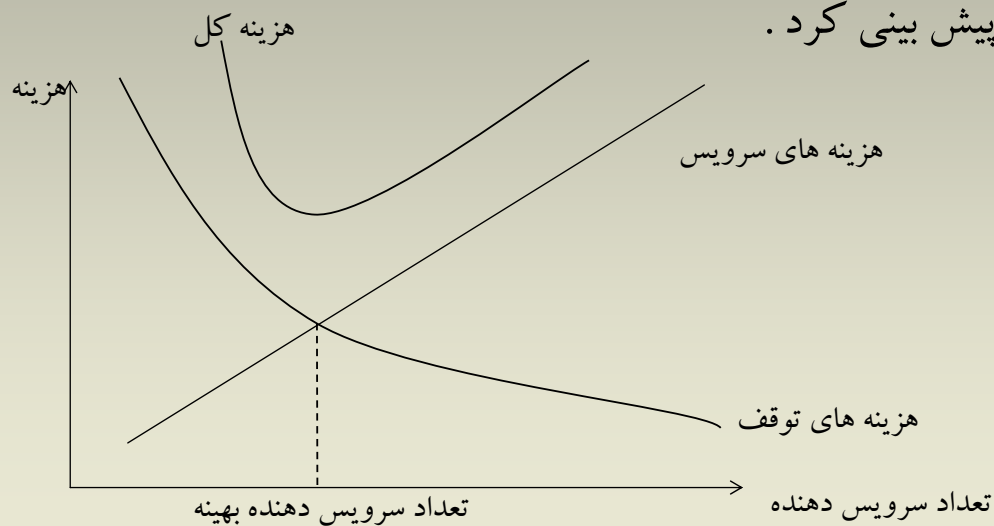
مثال: یک شرکت دولتی جهت تامین برق شهری تصمیم به ایجاد یک نیروگاه کرده هزینه خرید تجهیزات ۱۰۰۰۰۰۰۰ دلار هزینه نت سالیانه ۵۰۰۰۰ دلار، هزینه بیمه و غیره سالیانه ۳۰۰۰ دلار که درآمد سالیانه این نیروگاه ۲۵۰۰۰ دلار و ارزش اسقاطی آن بعد از ۲۵ سال ۲۰۰۰۰۰۰ دلار است با $i = 8\%$ پروژه اقتصادی است.

$$\frac{B}{C} = \frac{EUAB}{EUAC} \\ = \frac{25000 + 2000000(A/F, 8\%, 25)}{50000 + 3000 + 10000000(A/P, 8\%, 20)} = \frac{52358}{9420900} < 1$$

اقتصادی نیست

کاربرد تئوری صف در نت Queueing Theory

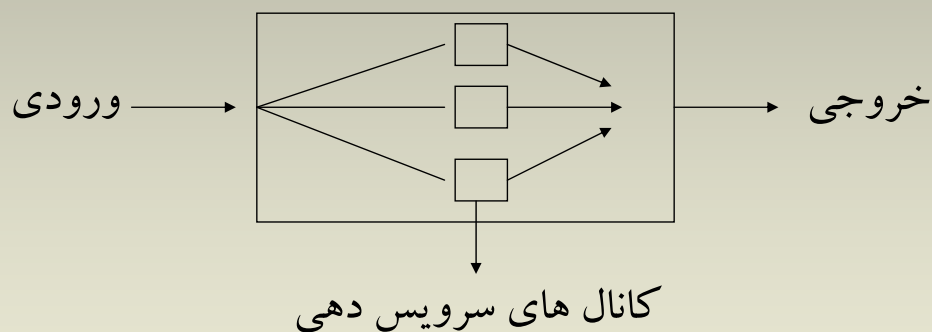
صف یکی از مباحث مهم در نت است. از آنجائیکه از کار افتادگی تجهیزات یک متغیر تصادفی است و زمان آن قابل پیش بینی نیست لذا به طبع آن نمی توان تعداد سرویس دهنده را پیش بینی کرد.



ساختار صف

– مشتری

– سرویس دهنده



مشخصات فرایندهای صف

۱- فرایند ورود مشتری ها

مشتریان هر صف به صورت محدود یا نامحدود وارد سیستم می شوند به انفرادی و دسته ای هم تقسیم می شوند .

انفرادی مانند فرود یک هواپیما به فرودگاه

دسته ای مانند ورود یک خانواده به یک رستوران

نرخ ورود مشتریان به سیستم های صف λ است . معکوس متوسط زمان بین دو ورود متوالی مشتریان $\lambda = 5$ در هر ساعت ۵ مشتری وارد سیستم می شوند .

مشخصات فرایندهای صف

۲- فرایند سرویس دهی : میانگین نرخ سرویس دهی μ

($\mu = 1/6$) در هر ساعت ۶ نفر سرویس می گیرد .

۳- تعداد سرویس دهنده

۴- ظرفیت سیستم : محدود یا نامحدود بودن

۵- جمعیت مشتری

انواع هزینه ها در تئوری صف

۱- هزینه سرمایه گذاری که بصورت بهره و استهلاک قابل محاسبه است .

۲- هزینه عملیاتی شامل نیروی انسانی و ...

۳- هزینه نت

۴- سایر هزینه ها مثل : اجاره و ...

فرمولهای تئوری صف

λ : نرخ ورود مشتری به صف

μ : نرخ سرویس دهی

P_0 : احتمال اینکه سیستم بدون مشتری باشد

P_n : احتمال اینکه n مشتری در سیستم باشد

L : متوسط تعداد مشتری در سیستم (منتظر یا در حال تعمیر)

L_q : متوسط تعداد مشتری در صف (منتظر)

W : متوسط زمان انتظار مشتری در سیستم

W_q : متوسط زمان انتظار مشتری در صف

P_w : احتمال اینکه سیستم مشغول باشد .

K : تعداد کانال های سرویس دهی

B : شدت ترافیک (ضریب بهره وری)

حالت‌های خط انتظار

۱- $\mu = \lambda$: صف ایجاد نمی شود .

$$\lambda > \mu - 2$$

مثلاً نرخ ورود ۶ نفر در ساعت ، سرویس دهی ۵ نفر در ساعت صف زیاد می گردد و باید سرویس دهی افزایش یابد .

۳- $\lambda < \mu$ خط انتظار نداریم .

الف - فرمولهای صف یک کاناله

$$P = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = P$$

$$P_1 = 1 - P$$

$$P_w = 1 - P_1$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

یا

$$\frac{P}{1 - P}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu (\mu - \lambda)}$$

یا

$$\frac{P^2}{1 - P}$$

الف - فرمولهای صف یک کاناله

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\mu(1 - P)}$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \quad \text{یا} \quad \frac{P}{\mu(1 - P)}$$

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad \text{یا} \quad (1 - P)P^n$$

$$B = \frac{\lambda}{\mu}$$

ب - فرمولهای صف چند کاناله

$$P_k = \frac{1}{\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(P)^j}{j!} + \frac{(P)^k}{k! \left(1 - \frac{\lambda}{\mu k}\right)}}$$

$$P_w = 1 - p_k$$

$$L_q = \frac{P^{k+1}}{(k-1)!(k-P)^2} \times P_k$$

یا

$$L = L_q + P$$

ب - فرمولهای صف چند کاناله

$$W_q = \frac{P^{k+1}}{\lambda(k-1)!(k-p)^p} \times P, \quad \text{یا} \quad \frac{Lq}{\lambda}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \quad \text{یا} \quad \frac{L}{\lambda}$$

$$P_n = \frac{P^n}{k!(k^{n-k})}$$

$$n \geq k$$

$$B = \frac{\lambda}{k\mu}$$

مثال :

تعمیرگاهی که توسط یک تعمیرکار اداره می شود مشتریان را بصورت نوبتی سرویس می دهد . او به این نتیجه رسیده است که ورود مشتریان (اتومبیل های از کار افتاده) به تعمیرگاه بر اساس فرایند پواسن و با نرخ ۵ ماشین در ساعت و همچنین زمان سرویس دهی (تعمیر اتومبیل ها) از متغیر تصادفی منفی نمایی تبعیت نموده و یا متوسط ۸ دقیقه می باشد مطلوبست محاسبه :

۱- متوسط تعداد مشتریان (اتومبیل ها) حاضر در داخل تعمیرگاه (سیستم) داخل صف

۲- متوسط زمان انتظار اتومبیل ها در صف و سیستم

۳- چند درصد اوقات مکانیک بیکار است

۴- احتمال اینکه ۳ ماشین در صف منتظر تعمیر ماشین باشد

۵- شدت ترافیک

$$\lambda = 5 \quad \mu = 60/8 = 7.5 \text{ ساعت}$$

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{7.5} = 0.66$$

$$L_q = \frac{P^2}{1 - P} = \frac{(0.66)^2}{1 - 0.66} = 1.28 \text{ ماشین}$$

$$L = \frac{P}{1 - P} = \frac{0.66}{1 - 0.66} = 1.94 \text{ ماشین}$$

$$W_q = \frac{P}{\mu(1 - P)} = \frac{0.66}{7.5(1 - 0.66)} = 0.26 \text{ ساعت}$$

$$W = \frac{1}{\mu(1 - P)} = \frac{1}{7.5(1 - 0.66)} = 0.39 \text{ ساعت}$$

$$P_0 = 1 - P = 1 - 0.66 = 0.34$$

$$P_n = (1 - P)P^n = (1 - 0.66)(0.66)^3 = 0.097$$

$$B = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{7.5} = 0.66$$

مثال :

در شرکتی ، تجهیزات بر طبق فرایند پواسن با متوسط ۶ ماشین در ساعت از کار می افتند . شرکت دارای ۳ تعمیرگاه بوده که زمان سرویس دهی آنها از توزیع نمایی منفی تبعیت می کند . اگر زمان سرویس دهی ۲۰ دقیقه برای هر ماشین باشد مطلوبست :

۱- شدت ترافیک

۲- متوسط تعداد تجهیزات در تعمیرگاه و صف

۳- متوسط زمانیکه یک ماشین در تعمیرگاه و صف خواهد بود .

۴- احتمال اینکه هر ۳ تعمیرگاه بدون ماشین باشد چند است .

۵- احتمال اینکه ۱۰ ماشین در تعمیرگاه باشد چند است.

$$\lambda = 6 \quad \mu = 3 \quad k = 3$$

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2$$

$$B = \frac{\lambda}{k\mu} = \frac{6}{3 \times 3} = 0.66$$

$$L_q = \frac{P^{k+1}}{(k-1)!(k-P)^2} \times P = \frac{2^{3+1}}{(3-1)!(3-2)^2} \times 0.11 = 0.88$$

$$L = L_q + P = 0.88 + 2 = 2.88$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.88}{6} = 0.146 \text{ ساعت}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.146 + \frac{1}{3} = 0.48 \text{ ساعت}$$

$$P_0 = \frac{1}{\left[\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} \right] + \frac{2^3}{3! \left[1 - \frac{6}{3 \times 3} \right]}} = \frac{1}{5 + 4} = 0.11$$

$$P_n = \frac{P^k}{k! \binom{n-k}{k}} = \frac{2^{10}}{3! \binom{10-3}{3}} = 0.078$$